1. Матрицы, основные понятия. Действия над матрицами.

Матрица — это прямоугольная таблица, составленная из чисел размерности m x n.  
каждый элемент матрица имеет координаты, записываемые так:   
Amn, где m – номер строки, n – номер столбца.

Единичная матрица обозначается E. В ней все элементы равны нулю, кроме главное диагонали, там единицы только.

При сложении и вычитании матрицы складываются или вычитаются по элементам. Для этого нужны две матрицы одинаковой размерности.  
При умножении каждый элемент каждой строки умножается на каждый элемент соответствующего столбца. Требуются матрица, где количество столбцов такое же, как кол-во строк в другой матрице. Деление матрицы на матрицу не производится.

Транспонирование — переворачивание матрицы относительно главной диагонали.

1. Определители второго, третьего порядков.

Для второго порядка из произведения элементов главной диагонали вычитается произведение элементов побочной диагонали.

Для третьего порядка решается по правилу Саррюса.

1. Свойства определителей.

Если поменять в определителе любые 2 строки или 2 столбца, его знак поменяется.

Общий множитель всех элементов матрицы можно вынести за знак определителя.

Если в определителе есть 2 пропорциональных строки или столбца, он равен нулю (пропорциональны т.е. равны друг другу, умноженному на какое-то число)

1. Обратная матрица.

Матрицы, которые при умножении друг на друга в ответе ноль, называются обратными. Возможно только с квадратными матрицами.

Представляет из себя матрицу, составленную из алгебраических дополнений к исходной матрице и умноженную на . Алгебраические дополнения находятся от миноров по формуле (-1)ij\*М. Сами миноры находятся путём вычёркивания строки и столбца, в которых этот минор будет находиться.

1. Ранг матрицы.

Ранг матрицы — это наивысший порядок её ненулевых миноров. Ранг ступенчатой матрицы равен кол-ву её ненулевых строк.

При равносильных преобразованиях, вычёркивании или прибавлении нулевой строки или столбца, а также при транспонировании матрицы ранг не меняется.

1. Системы линейных уравнений, основные понятия. Теорема Кронекера – Капелли.

Система линейных уравнений — это набор линейных уравнений, каждое из которых имеет определённое кол-во переменных. Какая-то переменная может отсутсвовать в том или ином уравнении, но все уравнения должны быть выстроены «цепочкой», когда каждая переменная меняется, если изменить хотя бы одну.

Система линейных алгебраических уравнений имеет решение тогда и только тогда, когда ранг её основной матрицы равен рангу её расширенной матрицы.

1. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.

Мой любимый. Метод равносильных преобразований. При почленном складывании или вычитании строк друг с другом или умножении всех элементов строки, определитель не изменится. Таким образом можно привести матрицу с ступенчатому виду. Из такого вида вычислить переменные крайне легко.

1. Матричный метод решения систем линейных уравнений.

Метод обратной матрицы. Крайне многодельный метод. Если умножить матрицу-столбец свободных членов на обратную матрицу данной, будет получены все решения системы.

1. Метод Крамера решения систем линейных уравнений.

Метод заключается в замене столбца матрицы столбцом свободных членов. Деление определителя полученной матрицы на определитель изначальной матрицы даст значение той переменной, которая была в вычеркнутом столбце.

1. Линейные операции над векторами, их свойства.

Сложение векторов. Вектор суммы — это вектор, у которого начало совпадает с началом одного вектора, а конец с концом другого, если его начало совпадало с концом первого вектора.

Вычитание векторов. Вектор суммы — это вектор, отложенный из конца второго вектора к концу первого.

Умноженный на число вектор — это вектор, совпадающий с исходным, только длина увеличена в то кол-во раз, в которое умножают.

1. Линейная зависимость и независимость векторов. N–мерное линейное векторное пространство. Теорема о разложении произвольного вектора пространства по базисным векторам.

Линейно зависимые вектора находятся в одной плоскости, линейно независимые вектора находятся в разных плоскостях. Любые два пересекающиеся, параллельные или совпадающие вектора линейно зависимы. N–мерное линейное векторное — это множество векторов с действительными координатами, в котором можно проводить все операции над векторами и действительны все их свойства. Теорема о разложении произвольного вектора пространства по базисным векторам гласит следующее: «любой вектор можно разложить по базисным векторам единственным способам, а количества базисов будет равно количеству мер пространства».

1. Скалярное произведение векторов. Евклидово пространство. Прямоугольная система координат.

Обозначается обычным знаком умножения. Является скалярной величиной (не векторной). Вычисляется по формуле «Произведение длин векторов на косинус угла между ними».

Евклидово пространство — привычное для человеческого восприятия трёхмерное пространство, в котором мы сейчас работаем.

Прямоугольная система координат. Это система координат в любом (двух и более мерном) пространстве, где все оси координат перпендикулярны друг другу. Их количество, само собой, равно количеству мер в используемом пространстве.

1. Векторное произведение векторов. Геометрические и физические приложения.

Векторное произведение это вектор, перпендикулярный обоим исходным векторам, а его длина численно равна площади параллелограмма, построенного на этих двух векторах. Для коллинеарных векторов его принято считать равным нулю.

Высчитывается это по страшной формуле:

Первая координата = вторая координата первого вектора, умноженная на третью координату второго вектора — третья координата первого, умноженная на вторую координату второго вектора.

Вторая координата = третья координата первого вектора, умноженная на первую координату второго вектора — вторая координата первого, умноженная на третью координату второго вектора.

Третья координата = первая координата первого вектора, умноженная на вторую координату второго вектора — первая координата первого, умноженная на первую координату второго вектора.

Или через определитель матрицы, где вторая строчка — координаты первого вектора, третья строчка — координаты второго вектора, а первая строчка заполняется «индикаторами» i j k, которые покажут, где какая координата в ответе.

Физический смысл — векторное произведение вектора силы и радиус-вектора точки приложения силы является вектором момента силы.

1. Смешанное произведение векторов. Геометрическое приложение.

Смешанным произведением называют скалярное произведение одного вектора на векторное произведение двух других. Имеет много общего со скалярным произведением. Например, геометрический смысл — это объем параллелепипеда, построенного на этих трёх векторах.

1. Комплексные числа, определение, геометрическое изображение. Различные формы записи комплексных чисел. Операции над комплексными числами в алгебраической форме.

Это числа, содержащие мнимую часть, то есть i = . Изображаются в двумерной координатной плоскости, где одна ось обозначает действительную часть, а вторая — мнимую. Число может быть выражено в трёх формах. Алгебраической, показательной и тригонометрической.

1. Операции над комплексными числами в алгебраической форме.

В алгебраической форме число записывается в виде z=a+b∙i

В данной форме все действия проводятся как с действительными числами, содержащих переменную i, при этом не стоит забывать, что i\*i даёт -1, а i4 даёт 1.

1. Операции над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах.

Тригонометрическая запись выглядит как где .

При умножении аргументы r перемножаются, а складываются. При делении аналогично.

С показательной формой проводится всё как с тригонометрической формой.

1. Извлечение корня из комплексного числа. Формула Муавра.

При извлечении корня n-ной степени из аргумента r извлекается корень этой же степени, а к прибавляется и делится на n. В результате получается n вариантов ответов.

1. Способы задания прямой на плоскости.

Через две точки, через прямую и точку, через точку и вектор.

1. Кривые второго порядка. Определение. Окружность. Основные характеристики. Построение.

Линия на плоскости, задаваемая этим уравнением:

Второй порядок из-за того, что в уравнении есть слагаемые со второй степенью. Коэффициенты A, B, C, D, E, F — Действительные числа.  
A, B, C не должны быть одновременно равны нулю.

Окружность — множество точек, равноудалённых от одной точки (центра окружности).

Уравнение   
Где a и b — координаты центра окружности. Строить удобно используя квадрат или крест с центром в центре окружности.

1. Эллипс. Уравнение. Основные характеристики. Построение.

Эллипс — множество точек на плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух заданных точек (называемых фокусами) есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами. Уравнение имеет вид:

При этом или , где c — половина расстояния между фокусами.

Это зависит от расположения фокусов. Если они расположены горизонтально, то верно первое выражение. Если один над другим, то второе выражение истинно.

Эксцентриситет — отношение расстояния между фокусами к длине большей оси. Всегда больше единицы.

1. Гипербола. Каноническое уравнение. Основные характеристики. Построение.

Гипербола — это множество точек, где разность расстояний от каждой из которых до двух заданных точек (фокусов) есть величина постоянная.

Уравнение гиперболы имеет вид:  
 или

В зависимости от ориентации. Первое в горизонтальном положении, второе — в вертикальном.

При этом сохраняется равенство где с — половина расстояния между фокусами.

Эксцентриситет — отношение расстояния между фокусами к длине действительной оси. Действительная ось — ось, пересекающая график.

Строится при помощи Прямоугольника со сторонами по длине равными удвоенным коэффициентам a и b. Прямые, содержащие диагонали этого прямоугольника являются асимптотами данной гиперболы.

1. Парабола. Каноническое уравнение. Основные характеристики. Построение.

Парабола — совокупность точек, равноудалённых от заданной точки (фокуса) и прямой (директрисы).

Канонических уравнений два, в зависимости от того, на какой оси находится фокус. , если ветви параболы направлены влево или вправо (тогда фокус находится на оси абсцисс)

, если ветви параболы направлены вверх или вниз ( тогда фокус находится на оси ординат).

1. Различные виды уравнений плоскости в пространстве.

Общее. Имеет уравнение Ax + By + Cz + D = 0, где A, B, C, D — действительные числа. Никаких ограничений, все значения данного выражения — координаты какой-то точки, принадлежащей этой плоскости.

Нормальное. Имеет уравнение вида cos(α)⋅x + cos(β)⋅y + cos(γ)⋅z − p = 0, где p — Расстояние от начала координат до плоскости, а cos(α), cos(β) и cos(γ) — направляющие косинусы нормального вектора данной плоскости единичной длины. Что бы это не значило…

В отрезках. Если прямая отсекает от всех координатных прямых какие-то отрезки, то длины этих отрезков будут равны a, b и c. И плоскость можно записать следующим уравнением: .

1. Различные виды уравнений прямой в пространстве.

Как пересечение двух плоскостей. Просто система из двух уравнений, каждое из которых является уравнением плоскости.

Параметрические уравнения в пространстве.

Канонические уравнения. Уравнение с тремя знаками равенства вида:  
 , где — смещение графика по соответствующим осям, а — углы, под которыми находится прямая относительно координатных осей.

1. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве.

Прямые могу пересекать плоскости (иметь одну общую точку), быть им параллельными (не иметь общих точек) или лежать в них (всё множество точек, из которых состоит прямая принадлежит этой плоскости).

Для экспериментов:

1. Матрицы, основные понятия. Действия над матрицами.
2. Определители второго, третьего порядков.
3. Свойства определителей.
4. Обратная матрица.
5. Ранг матрицы.
6. Системы линейных уравнений, основные понятия. Теорема Кронекера – Капелли.
7. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.
8. Матричный метод решения систем линейных уравнений.
9. Метод Крамера решения систем линейных уравнений.
10. Линейные операции над векторами, их свойства.
11. Линейная зависимость и независимость векторов. N–мерное линейное векторное пространство. Теорема о разложении произвольного вектора пространства по базисным векторам.
12. Скалярное произведение векторов. Евклидово пространство. Прямоугольная система координат.
13. Векторное произведение векторов. Геометрические и физические приложения.
14. Смешанное произведение векторов. Геометрическое приложение.
15. Комплексные числа, определение, геометрическое изображение. Различные формы записи комплексных чисел. Операции над комплексными числами в алгебраической форме.
16. Операции над комплексными числами в алгебраической форме.
17. Операции над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах.
18. Извлечение корня из комплексного числа. Формула Муавра.
19. Способы задания прямой на плоскости.
20. Кривые второго порядка. Определение. Окружность. Основные характеристики. Построение.
21. Эллипс. Уравнение. Основные характеристики. Построение.
22. Гипербола. Каноническое уравнение. Основные характеристики. Построение.
23. Парабола. Каноническое уравнение. Основные характеристики. Построение.
24. Различные виды уравнений плоскости в пространстве.
25. Различные виды уравнений прямой в пространстве.
26. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве.